دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین دوم - پاسخ نامه

طراح: فرزاد جعفری، پریسا محمدی

۱. جمع‌آوری فیگورهای لگو

فرهاد به لگو (LEGO) علاقهٔ بسیار دارد و کلکسیونی از مینی‌فیگورها (Minifigure) را به طور پیوسته جمع می‌کند. فرض کنید کلاً m نوع مینی‌فیگور وجود داشته باشد و فرهاد هر مرتبه که یک مینی‌فیگور جدید خریداری می‌کند با احتمال p_i از نوع iام $(i = ۱, ۲, \dots, m)$ است.

حال اگر فرهاد n امین مینی‌فیگور را جمع‌آوری کرده باشد، با چه احتمالی این مینی‌فیگور جدید است؟

پاسخ :

پاسخ: با استفاده از قانون احتمال کل و مشروط کردن روی نوع مینی‌فیگور خریداری شده در مرحله nـام، مسئله را حل می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد جدید بودن مینی‌فیگور nـام و B_i پیشامد خریداری شدن مینی‌فیگور نوع i باشد.

$$P(A) = \sum_{i=۱}^{m} P(A|B_i)P(B_i)$$

احتمال اینکه مینی‌فیگور خریداری شده از نوع i باشد برابر با $P(B_i) = p_i$ است. شرط جدید بودن نوع i در خرید nـام $(A|B_i)$، این است که در $n - ۱$ خرید قبلی، هیچ‌کدام از نوع i نبوده باشند. احتمال این پیشامد مستقل برابر با $(۱ - p_i)^{n-۱}$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_۱)P(B_۱) + P(A|B_۲)P(B_۲) + \cdots + P(A|B_m)P(B_m) \\ &= (۱ - p_۱)^{n-۱}p_۱ + (۱ - p_۲)^{n-۱}p_۲ + \cdots + (۱ - p_m)^{n-۱}p_m \\ &= \sum_{i=۱}^{m} p_i(۱ - p_i)^{n-۱} \end{aligned}$$

۲. علی و سینا و استقلال رویدادها

علی و سینا وسط یک مسابقه حساس بازی آنلاین هستند. دو اتفاق می‌تواند باعث باخت کل تیم شود:

پیشامد A: اینترنت علی قطع شود. پیشامد B: اینترنت سینا قطع شود.

آن‌ها می‌دانند که این دو اتفاق کاملاً از هم مستقل هستند (شرکت‌های اینترنت آن‌ها هیچ ربطی به هم ندارند).

ناگهان سینا بازی را متوقف می‌کند و از علی می‌پرسد: «صبر کن! ما می‌دونیم که قطع شدن اینترنت هرکدوم از ما از هم مستقله. ولی آیا اینکه اینترنت تو قطع بشه اما مال من وصل بمونه هم مستقله؟ یا اینکه شانس بیاریم و اینترنت هردومون وصل بمونه و بازی رو ببریم چطور؟»

حال به علی کمک کنید که این دو اصل اساسی احتمال را ثابت کند و سریع‌تر به بازی برگردند.

پاسخ :

راه حل این مسئله به شرح زیر است. ابتدا پیشامدها را بر اساس صورت سوال تعریف می‌کنیم:

- A: اینترنت علی قطع شود. $\bar{A}$: اینترنت علی وصل بماند.
- B: اینترنت سینا قطع شود. $\bar{B}$: اینترنت سینا وصل بماند.

فرض مسئله این است که پیشامدهای A و B مستقل هستند، یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

اثبات استقلال A و $\bar{B}$ (قطع شدن اینترنت علی و وصل بودن اینترنت سینا)
برای اثبات، از این واقعیت شروع می‌کنیم که پیشامد A را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار (جدا از هم) نوشت:

$$A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

با گرفتن احتمال از دو طرف تساوی و با توجه به ناسازگار بودن دو بخش داریم:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

حال از فرض استقلال A و B استفاده می‌کنیم:

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} P(A) - P(A)P(B) &= P(A \cap \bar{B}) \\ P(A)(۱ - P(B)) &= P(A \cap \bar{B}) \\ P(A)P(\bar{B}) &= P(A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

این تساوی نشان می‌دهد که پیشامدهای A و $\bar{B}$ نیز مستقل هستند.

اثبات استقلال $\bar{A}$ و $\bar{B}$ (وصل بودن اینترنت هر دو)
روند اثبات کاملاً مشابه است. این بار برای پیشامد $\bar{A}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A} \cap (B \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \\ P(\bar{A}) &= P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ P(\bar{A}) &= P(\bar{A})P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ P(\bar{A}) - P(\bar{A})P(B) &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ P(\bar{A})(۱ - P(B)) &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ \implies P(\bar{A})P(\bar{B}) &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

این تساوی نیز نشان می‌دهد که پیشامدهای $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مستقل هستند.

۳. زمان‌بندی وظایف سرور

صف وظایف یک سرور شامل ۳ وظیفه با اولویت بالا و ۲ وظیفه با اولویت پایین است. یک برنامهٔ زمان‌بندی (scheduler) به‌صورت تصادفی یکی از وظایف موجود در صف را برای ارزیابی انتخاب می‌کند.

اگر وظیفهٔ انتخاب‌شده دارای اولویت پایین باشد، زمان‌بند اجرای آن را به تعویق می‌اندازد و بلافاصله آن را به صف بازمی‌گرداند (وظیفه اجرا نمی‌شود). اما اگر وظیفهٔ انتخاب‌شده دارای اولویت بالا باشد، زمان‌بند آن را اجرا کرده و وظیفه برای همیشه از صف حذف می‌شود.

این فرآیند زمان‌بندی سه مرتبهٔ متوالی تکرار می‌شود.

الف) احتمال این‌که سومین وظیفه‌ای که توسط زمان‌بند پردازش می‌شود، یک وظیفه با اولویت بالا باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم دومین وظیفهٔ پردازش‌شده دارای اولویت بالا بوده است، احتمال این‌که اولین وظیفهٔ پردازش‌شده نیز دارای اولویت بالا بوده باشد چقدر است؟

پاسخ :

برای حل این مسئله، پیشامدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- H_i: وظیفه iـام که پردازش می‌شود، اولویت بالا دارد. L_i: وظیفه iـام که پردازش می‌شود، اولویت پایین دارد.

الف) احتمال اینکه سومین وظیفه پردازش شده اولویت بالا داشته باشد ($P(H_۳)$):
این احتمال را با استفاده از قانون احتمال کل و جمع روی تمام مسیرهای ممکن برای دو انتخاب اول محاسبه می‌کنیم. چهار مسیر ممکن وجود دارد که در انتخاب سوم، یک وظیفه با اولویت بالا پردازش شود:

$$\begin{aligned}
P(H_۳) &= P(H_۱ \cap H_۲ \cap H_۳) + P(H_۱ \cap L_۲ \cap H_۳) + P(L_۱ \cap H_۲ \cap H_۳) + P(L_۱ \cap L_۲ \cap H_۳) \\
&= \left(\frac{۳}{۵} \cdot \frac{۲}{۴} \cdot \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۳}{۵} \cdot \frac{۲}{۴} \cdot \frac{۲}{۴}\right) + \left(\frac{۲}{۵} \cdot \frac{۳}{۵} \cdot \frac{۲}{۴}\right) + \left(\frac{۲}{۵} \cdot \frac{۲}{۵} \cdot \frac{۳}{۵}\right) \\
&= \frac{۶}{۶۰} + \frac{۱۲}{۸۰} + \frac{۱۲}{۱۰۰} + \frac{۱۲}{۱۲۵} \\
&= \frac{۲۳۳}{۵۰۰}
\end{aligned}$$

ب) احتمال اینکه اولین وظیفه اولویت بالا داشته، به شرط اینکه دومی نیز اولویت بالا داشته باشد ($P(H_۱|H_۲)$):
از تعریف احتمال شرطی استفاده می‌کنیم: $P(H_۱|H_۲) = \frac{P(H_۱ \cap H_۲)}{P(H_۲)}$.
ابتدا مخرج کسر، $P(H_۲)$، را با مشروط کردن به نتیجه انتخاب اول محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
P(H_۲) &= P(H_۲|H_۱)P(H_۱) + P(H_۲|L_۱)P(L_۱) \\
&= \left(\frac{۲}{۴} \cdot \frac{۳}{۵}\right) + \left(\frac{۳}{۵} \cdot \frac{۲}{۵}\right) \\
&= \frac{۲۷}{۵۰}
\end{aligned}$$

صورت کسر نیز برابر با $P(H_۱ \cap H_۲) = P(H_۲|H_۱)P(H_۱) = \frac{۲}{۴} \cdot \frac{۳}{۵} = \frac{۳}{۱۰}$ است.
بنابراین، پاسخ نهایی برابر است با:

$$P(H_۱|H_۲) = \frac{۳/۱۰}{۲۷/۵۰} = \frac{۵}{۹}$$

۴. تحلیل خطای انتقال داده

یک سیستم ارتباطی، داده‌ها را در قالب بسته‌های ۲ بیتی ارسال می‌کند. هر بیت در مبدأ با احتمال ۵۰ درصد می‌تواند ۰ یا ۱ باشد. در حین انتقال، هر بیت به طور مستقل با احتمال ۱۰ درصد دچار محوشدگی (fade) شده و به گیرنده نمی‌رسد. برای یک بسته دو بیتی که ارسال می‌شود، احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) احتمال آن که هر دو بیت ارسال‌شده ۱ باشند، به شرط آن که فقط یک بیت دریافت شده و مقدارش ۱ باشد.

ب) احتمال آن که هر دو بیت ارسال‌شده ۱ باشند، به شرط آن که از بین بیت‌های دریافت‌شده، حداقل یک بیت ۱ باشد.

ج) یک مهندس جایگاه یکی از دو بیت (اول یا دوم) را به صورت تصادفی انتخاب و وضعیت آن را بررسی می‌کند. اگر بیت در آن جایگاه به درستی دریافت شده و مقدار آن ۱ باشد، احتمال آن که هر دو بیت ارسال‌شده ۱ باشند چقدر است؟

پاسخ :

الف)
ابتدا پیشامدها را بر اساس صورت سوال تعریف می‌کنیم: فرض کنید $H_{۱۱}$ پیشامد ارسال بسته «۱۱» و E_a پیشامد دریافت دقیقا یک بیت با مقدار ۱ باشد. می‌خواهیم $P(H_{۱۱}|E_a)$ را بیابیم.

$$P(H_{۱۱}|E_a) = \frac{P(E_a|H_{۱۱})P(H_{۱۱})}{P(E_a)}$$

صورت کسر: احتمال دریافت یک بیت ۱ با شرط ارسال «۱۱» برابر است با $P(E_a|H_{۱۱}) = (۰/۹ \times ۰/۱) + (۰/۱ \times ۰/۹) = ۰/۱۸$.
بنابراین $P(E_a \cap H_{۱۱}) = ۰/۱۸ \times ۰/۲۵ = ۰/۰۴۵$.

مخرج کسر (احتمال کل): این پیشامد برای بسته‌های ارسالی «۱۱»، «۱۰»، «۰۱» و «۰۰» رخ می‌دهد.

$$\begin{aligned} P(E_a) &= P(E_a|H_{۱۱})P(H_{۱۱}) + P(E_a|H_{۱۰})P(H_{۱۰}) + P(E_a|H_{۰۱})P(H_{۰۱}) + P(E_a|H_{۰۰})P(H_{۰۰}) \\ &= (۰/۱۸)(۰/۲۵) + (۰/۹ \times ۰/۱)(۰/۲۵) + (۰/۱ \times ۰/۹)(۰/۲۵) + (۰)(۰/۲۵) \\ &= ۰/۰۴۵ + ۰/۰۲۲۵ + ۰/۰۲۲۵ + ۰ = ۰/۰۹ \end{aligned}$$

بنابراین، پاسخ نهایی برابر است با:

$$P(H_{۱۱}|E_a) = \frac{۰/۰۴۵}{۰/۰۹} = \frac{۱}{۲}$$

ب)
فرض کنید E_b پیشامد این باشد که حداقل یک بیت ۱ دریافت شود. می‌خواهیم $P(H_{۱۱}|E_b) = \frac{P(E_b \cap H_{۱۱})}{P(E_b)}$ را محاسبه کنیم.

صورت کسر: اگر بسته ارسالی «۱۱» باشد، تنها حالتی که حداقل یک ۱ دریافت نشود، محو شدن هر دو بیت است. بنابراین:

$$P(E_b|H_{۱۱}) = ۱ - P(\text{هر دو بیت محو شوند}) = ۱ - (۰/۱ \times ۰/۱) = ۰/۹۹$$
$$P(E_b \cap H_{۱۱}) = P(E_b|H_{۱۱})P(H_{۱۱}) = ۰/۹۹ \times ۰/۲۵ = ۰/۲۴۷۵$$

مخرج کسر: از متمم استفاده می‌کنیم. $P(E_b) = ۱ - P(E_b^c)$. پیشامد E_b^c یعنی «هیچ بیت ۱ دریافت نشود». این یعنی هر بیت یا ۰ بوده و دریافت شده، یا محو شده است.

$$\begin{aligned} P(\text{یک بیت ۱ نباشد}) &= P(\text{ارسال ۰ و دریافت موفق}) + P(\text{محو شدن}) \\ &= (۰/۵ \times ۰/۹) + ۰/۱ = ۰/۵۵ \\ P(E_b^c) &= P(\text{بیت اول ۱ نباشد}) \times P(\text{بیت دوم ۱ نباشد}) = ۰/۵۵ \times ۰/۵۵ = ۰/۳۰۲۵ \\ P(E_b) &= ۱ - ۰/۳۰۲۵ = ۰/۶۹۷۵ \end{aligned}$$

بنابراین، پاسخ نهایی برابر است با:

$$P(H_{۱۱}|E_b) = \frac{۰/۲۴۷۵}{۰/۶۹۷۵} \approx ۰/۳۵۴۸$$

ج)

فرض کنید E_c پیشامد این باشد که بیت بررسی‌شده ۱ و دریافت شده است. می‌خواهیم $P(H|E_c) = \frac{P(E_c|H_{۱۱})P(H_{۱۱})}{P(E_c)}$ را محاسبه کنیم.

صورت کسر: اگر «۱۱» ارسال شده باشد، هر بیتی که مهندس انتخاب کند ۱ است. احتمال دریافت موفق آن ۰/۹ است.

$$P(E_c|H_{۱۱}) = ۰/۹$$
$$P(E_c \cap H_{۱۱}) = P(E_c|H_{۱۱})P(H_{۱۱}) = ۰/۹ \times ۰/۲۵ = ۰/۲۲۵$$

مخرج کسر: احتمال اینکه یک بیت تصادفی در یک جایگاه دلخواه ۱ و دریافت شده باشد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(E_c) &= P(\text{بیت ارسال‌شده ۱ باشد}) \times P(\text{دریافت موفق}) \\ &= ۰/۵ \times ۰/۹ = ۰/۴۵ \end{aligned}$$

بنابراین، پاسخ نهایی برابر است با:

$$P(H_{۱۱}|E_c) = \frac{۰/۲۲۵}{۰/۴۵} = \frac{۱}{۲}$$

۵. عکاسی اندی وارهول

قبل از اختراع دوربین های دیجیتال در قرن بیست و یکم از دوربین هایی استفاده می شد که با گرفتن عکس، بلافاصله تصویر روی کاغذ های مخصوص چاپ شده و از دوربین خارج میشد. اندی وارهول عکاس معروف یکی از همین دوربین ها را در اختیار دارد این دوربین ها در ۷۵ درصد مواقع عکس را با موفقیت تحویل میدهد و در ۲۵ درصد مواقع عکسی تار و بی کیفیت تولید میکند.

اندی میخواهد از یک منظره عکس بگیرد. فرض کنید عکس ها در لحظه چاپ میشوند و اندی میتواند موفقیت آمیز بودن آنها را بررسی کند و در صورت عدم موفقیت دوباره عکس بگیرد. اما تعداد کاغذ های مخصوص عکس برداری اندی محدود است و اگر او تمام کاغذ عکس ها را استفاده کند و هیچ کدام موفقیت آمیز نباشند او با ناراحتی به خانه برمیگردد.

احتمال آنکه اندی k کاغذ عکس داشته باشد برابر با ۲^{-k} است. $(k > ۰)$

توجه داشته باشید که احتمال خراب شدن هر عکس مستقل از عکس قبلی است.

الف) در چه صورتی اندی با ناراحتی به خانه برمی گردد ؟

ب) اگر اندی با ناراحتی به خانه برگشته باشد با چه احتمالی در ابتدا بیشتر از ۴ کاغذ داشته است ؟

پاسخ :

الف)
برای حل این بخش باید از قانون احتمال کل استفاده کنیم به این صورت که احتمال عدم موفقیت را به ازای هر تعداد کاغذ بدست آورده و این مقادیر را با هم جمع کنیم: فرض کنید پیشامد خراب شدن تلاش i ام برای عکس برداری را F_i مینامیم

$$P(Fail) = P(k=۱) \times P(Fail|k=۱) + P(k=۲) \times P(Fail|k=۲) + ...$$

در این صورت مقدار هر $P(Fail|k=n)$ برابر خواهد بود با شکست در n تلاش متوالی پس:

$$P(Fail|k=n) = P(F_۱ \cap F_۲ \cap F_۳ \cap ... \cap F_n)$$

با توجه به مستقل بودن پیشامد های F_iنسبت به هم خواهیم داشت

$$P(Fail|k=n) = P(F_۱) \times P(F_۲) \times ... \times P(F_n) = \frac{۱}{۴}^n$$

بنابراین جواب برابر است با

$$P(Fail) = P(k=۱) \times \frac{۱}{۴}^۱ + P(k=۲) \times \frac{۱}{۴}^۲ + P(k=۳) \times \frac{۱}{۴}^۳ + ...$$

طبق اطلاعات مساله احتمال $P(k=n)$ برابر است با ۲^{-k} پس:

$$P(Fail) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲}^۲ \times \frac{۱}{۴}^۲ + ...$$

که کافیست جمع جملات یک سری هندسی که بیشمار جمله دارد را محاسبه کنیم:

$$P(Fail) = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۷}$$

ب)
برای حل این بخش ابتدا احتمال متمم این پیشامد را محاسبه میکنیم:

$$P(k < ۵|Fail) = \frac{P(k < ۵ \cap Fail)}{P(Fail)}$$

$$\begin{aligned} P(k<۵\cap Fail) &= P(Fail|k=۱)P(k=۱)+P(Fail|k=۲)P(k=۲)+\\ &P(Fail|k=۳)P(k=۳)+P(Fail|k=۴)P(k=۴)\\ &=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸^۲}+\frac{۱}{۸^۳}+\frac{۱}{۸^۴}=\frac{۵۸۵}{۴۰۹۶} \end{aligned}$$

پس پاسخ نهایی به شکل زیر خواهد بود:

$$P(k>۴|Fail)=۱-P(k<۵|Fail)=۱-\frac{۴۰۹۵}{۴۰۹۶}=\frac{۱}{۴۰۹۶}$$

۶. سوپر جام

در دیدار سوپرجام ایران، چهار تیم استقلال، پرسپولیس، تراکتور و سپاهان حضور دارند. احتمال بردن، مساوی کردن و باختن هر تیم در برابر تیم مقابلش $\frac{۱}{۳}$ است. در این مسابقات تمام تیم ها به صورت دو به دو با هم بازی میکنند (یعنی هر تیم در این مسابقات ۳ بازی خواهد داشت). تیم برنده ۳ امتیاز میگیرد، در صورت تساوی هر دو تیم یک امتیاز و در صورت باخت به تیم بازنده هیچ امتیازی تعلق نمیگیرد.

الف) اگر تراکتور ۶ امتیاز کسب کرده باشد با چه احتمالی سپاهان ۴ امتیاز کسب کرده است؟

ب) در صورت حضور همزمان وحید هاشمیان و ریکاردو ساپینتو روی نیمکت پرسپولیس و استقلال بازی بین این دو تیم حتما مساوی میشود این حضور همزمان با احتمال ۰/۹ رخ میدهد. در صورت کسب ۴ امتیاز توسط استقلال در این مسابقات با چه احتمالی وحید هاشمیان و ریکاردو ساپینتو در بازی پرسپنولیس و استقلال روی نیمکت این دو تیم بوده اند؟

پاسخ :

الف)
با استفاده از تعریف احتمال خواسته مساله را بازنویسی میکنیم:

$$P(S=۴|T=۶)=\frac{P(S=۴\cap T=۶)}{P(T=۶)}$$

تراکتور در صورتی ۶ امتیاز میگیرد که ۲ بازی را برده و یک بازی را ببازد اگر روی تیمی که تراکتور را برده حالت بندی کنیم ۳ حالت خواهیم داشت و هر حالت با احتمال $\frac{۱}{۳}^۳$ رخ میدهد.

$$P(T=۶)=۳.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۹}$$

حالا باید روی گرفتن همزمان ۶ و ۴ امتیاز توسط تراکتور و سپاهان حالت بندی کنیم:

حالت اول آن است که سپاهان همان تیمی باشد که تراکتور را میبرد: بنابراین سپاهان باید با یکی از دو تیم استقلال و پرسپولیس مساوی کند و به دیگری ببازد.

$$P(SbeatsT) = \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳} \times ۲$$

حالت دیگر آن است که تراکتور سپاهان را ببرد (دو حالت) و سپاهان یکی از دوتیم استقلال یا پرسپولیس را ببرد و با دیگری مساوی کند (دو حالت)

$$P(TbeatsS) = ۲ \times \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۳} \times ۲$$

بنابراین احتمال گرفتن امتیازات گفته شده توسط تراکتور و سپاهان به صورت همزمان برابر است با مقدار زیر:

$$P(S = ۴ \cap T = ۶) = P(SbeatsT) + P(TbeatsS) = \frac{۲}{۸۱}$$

حالا کافیست مقادیر بدست آمده را در رابطه تعریف احتمال شرطی جایگذاری کنیم.

$$P(S = ۴|T = ۶) = \frac{\frac{۲}{۸۱}}{\frac{۱}{۹}} = \frac{۲}{۹}$$

ب)

برای حل این بخش نیاز به استفاده از قانون بیز داریم:

$$P(Draw|E = ۴) = \frac{P(Draw) \times P(E = ۴|Draw)}{P(E = ۴)}$$

برای آنکه استقلال ۴ امتیاز بگیرد باید یک بازی را ببرد یکی را مساوی کند و بازی دیگر را ببازد بنابراین !۳ حالت مختلف نتایج مقابل تیم ها خواهیم داشت

$$P(E = ۴) = ۳! \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

اگر بدانیم که استقلال در شهرآورد مساوی کند پس برای گرفتن ۴ امتیاز باید به یکی از تیم های سپاهان یا تراکتور ببازد و یکی را ببرد پس ۲ حالت داریم.

$$P(E = ۴|Draw) = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

پس جواب نهایی مساله عبارت زیر خواهد بود:

$$P(Draw|E = ۴) = \frac{\frac{۲}{۹} \times ۰/۹}{\frac{۲}{۹}} = ۰/۹$$

۷. الگوریتم جذب کننده

یک الگوریتم شبکه‌ی اجتماعی برای درگیر کردن شما، دو نوع محتوا نشان می‌دهد: ویدیوهای گربه یا مطالب جنجالی. فید شما با b ویدیوی گربه و r مطلب جنجالی شروع می‌شود. الگوریتم دو استراتژی مخفی دارد: حالت «حباب تأیید» یا حالت «آشوب» ، و همیشه کارش را در حالت «حباب تأیید» آغاز می‌کند. نحوه ی کار این الگوریتم به شرح زیر است :

نحوه پاسخ الگوریتم

- در حالت «حباب تأیید»: بعد از دیدن یک پست، c محتوی هم‌نوع آن را اضافه می‌کند. این کار باعث می‌شود شما بیشتر در معرض محتوایی قرار بگیرید که از قبل به آن علاقه نشان داده‌اید.
- در حالت «آشوب»: بعد از دیدن یک پست، c محتوای مخالف آن را اضافه می‌کند. هدف از این کار، ایجاد بحث و واکنش در شماست تا تعامل شما با پلتفرم بیشتر شود.

نحوه تصمیم‌گیری الگوریتم

- بعد از دیدن یک ویدیوی گربه: الگوریتم با احتمال q استراتژی خود را عوض می‌کند. الگوریتم تصور می‌کند محتوای آرام ممکن است خسته‌کننده باشد، بنابراین برای جذاب نگه داشتن فید، شانس خود را برای یک تغییر امتحان می‌کند.
- بعد از دیدن یک مطلب جنجالی: استراتژی خود را حفظ می‌کند. از آنجایی که محتوای جنجالی معمولاً باعث درگیری زیاد کاربر می‌شود، الگوریتم به استراتژی موفق خود ادامه می‌دهد.

سوال

حال شما به ترتیب این سه پست را می‌بینید: ویدیوی گربه، سپس مطلب جنجالی، و دوباره مطلب جنجالی. با توجه به این مشاهده، چقدر احتمال دارد که الگوریتم درست قبل از نمایش اولین مطلب جنجالی، به حالت «آشوب» رفته باشد؟

پاسخ :

با توجه به اینکه الگوریتم در حالت «حباب تأیید» شروع به کار کرده و حالت آن فقط پس از دیدن «ویدیوی گربه» می‌تواند تغییر کند، تنها دو مسیر یا سناریوی پنهان برای توضیح مشاهده ما (گربه، جنجالی، جنجالی) وجود دارد:

- **مسیر الف:** الگوریتم در تمام مراحل در حالت «حباب تأیید» باقی می‌ماند.
- **مسیر ب:** الگوریتم پس از دیدن ویدیوی گربه، به حالت «آشوب» تغییر حالت می‌دهد.

هدف ما محاسبه $P(\text{مسیر ب} \mid \text{مشاهده})$ است.

۱. محاسبه احتمال مشاهده به همراه مسیر الف (همیشه در حالت «حباب تأیید»):

در این سناریو، ما احتمال وقوع همزمان مشاهده و باقی ماندن الگوریتم در حالت عادی را محاسبه می‌کنیم. این کار با ضرب کردن احتمال هر مرحله در یکدیگر انجام می‌شود:

$$P(\text{مشاهده و الف}) = \overbrace{\left(\frac{b}{b+r}\right)}^{\substack{\text{احتمال دیدن گربه}\\ \text{در مرحله اول}}} \times \overbrace{(۱-q)}^{\substack{\text{احتمال}\\ \text{عدم تغییر حالت}}} \times \overbrace{\left(\frac{r}{b+r+c}\right)}^{\substack{\text{احتمال دیدن مطلب جنجالی}\\ \text{در مرحله دوم (پس از افزودن c گربه)}}} \times \overbrace{\left(\frac{r+c}{b+r+۲c}\right)}^{\substack{\text{احتمال دیدن مطلب جنجالی}\\ \text{در مرحله سوم (پس از افزودن c مطلب جنجالی)}}}$$

۲. محاسبه احتمال مشاهده به همراه مسیر ب (تغییر به حالت «آشوب»):

در این سناریو، حالت الگوریتم پس از مرحله اول تغییر می‌کند و این تغییر، روند افزودن محتوا در مراحل بعدی را تحت تأثیر قرار می‌دهد:

$$P(\text{مشاهده و ب}) = \underbrace{\left(\frac{b}{b+r}\right)}_{\substack{\text{احتمال دیدن گربه}\\ \text{در مرحله اول}}} \times \underbrace{q}_{\substack{\text{احتمال}\\ \text{تغییر حالت}}} \times \underbrace{\left(\frac{r}{b+r+c}\right)}_{\substack{\text{احتمال دیدن مطلب جنجالی}\\ \text{در مرحله دوم (پس از افزودن c گربه)}}} \times \underbrace{\left(\frac{r}{b+r+۲c}\right)}_{\substack{\text{احتمال دیدن مطلب جنجالی}\\ \text{در مرحله سوم (پس از افزودن c گربه دوباره!)}}}$$

نکته کلیدی: در مرحله سوم این مسیر، با وجود اینکه یک مطلب جنجالی دیده شده، طبق حالت «آشوب»، c ویدیوی گربه (محتوای مخالف) به فید اضافه شده است. به همین دلیل مخرج کسر سوم $b+r+۲c$ ولی صورت آن r باقی مانده است.

۳. محاسبه احتمال نهایی با استفاده از قاعده بیز:

$$P(\text{مسیر ب} \mid \text{مشاهده}) = \frac{P(\text{مشاهده و ب})}{P(\text{مشاهده و الف}) + P(\text{مشاهده و ب})}$$

با ساده‌سازی عبارات مشترک از صورت و مخرج، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &= \frac{q \cdot r}{(۱-q)(r+c) + q \cdot r} \\ &= \frac{qr}{r + c - qr - qc + qr} \\ &= \frac{qr}{r + c(۱-q)} \end{aligned}$$

۸. تحلیل تصمیم سه قاضی

در یک سیستم قضایی، هر فردی که محاکمه می‌شود با احتمال ۰/۷ واقعاً گناهکار است. قرار است فردی توسط سه قاضی محاکمه شود. تصمیم هر قاضی مستقل از دیگران بوده و دقت آن‌ها به‌صورت زیر است:

- اگر متهم واقعاً گناهکار باشد، هر قاضی با احتمال ۰/۸ رأی به «گناهکاری» می‌دهد.
- اگر متهم واقعاً بی‌گناه باشد، هر قاضی با احتمال ۰/۱ رأی به «گناهکاری» می‌دهد.

حال، در هر یک از موارد زیر و با اطلاع از نتیجهٔ مذکور، احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به «گناهکاری» بدهد را محاسبه کنید:

الف) قاضی اول و دوم، هر دو رأی به گناهکاری داده باشند.

ب) قاضی اول رأی به گناهکاری و دومی رأی به بی‌گناهی داده باشند.

ج) قاضی اول و دوم، هر دو رأی به بی‌گناهی داده باشند.

با توجه به نتایج بالا، آیا اطلاع از رأی دو قاضی اول در پیش‌بینی رأی قاضی سوم تأثیری دارد؟ توضیح دهید.

پاسخ :

ابتدا پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

- G: متهم واقعاً گناهکار باشد. $\bar{G}$: متهم واقعاً بی‌گناه باشد.
- A_i: قاضی iـ ام رأی به گناهکاری بدهد. $\bar{A}_i$: قاضی iـ ام رأی به بی‌گناهی بدهد.

با توجه به تعاریف بالا از صورت سوال، احتمالات زیر را داریم:
$P(G) = ۰/۷$، $P(\bar{G}) = ۰/۳$، $P(A_i|G) = ۰/۸$، $P(\bar{A}_i|G) = ۰/۲$، $P(A_i|\bar{G}) = ۰/۱$، $P(\bar{A}_i|\bar{G}) = ۰/۹$.

الف) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری داده‌اند ($A_۱, A_۲$):
با استفاده از قانون احتمال کل، احتمال رأی گناهکاری قاضی سوم را با مشروط کردن به وضعیت واقعی متهم محاسبه می‌کنیم:

$$P(A_۳|A_۱, A_۲) = P(A_۳|G)P(G|A_۱, A_۲) + P(A_۳|\bar{G})P(\bar{G}|A_۱, A_۲)$$

رابطه بالا به صورت زیر به دست آمده است :

$$P(A_۳|A_۱ \cap A_۲) = \frac{P(A_۳ \cap A_۱ \cap A_۲)}{P(A_۱ \cap A_۲)}$$

با استفاده از قانون احتمال کل، صورت کسر را بر اساس وضعیت واقعی متهم (G یا $\bar{G}$) باز می‌کنیم:

$$= \frac{P(A_۳ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap G) + P(A_۳ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap \bar{G})}{P(A_۱ \cap A_۲)}$$

کسر را به دو بخش تفکیک می‌کنیم:

$$= \frac{P(A_۳ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap G)}{P(A_۱ \cap A_۲)} + \frac{P(A_۳ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap \bar{G})}{P(A_۱ \cap A_۲)}$$

حال با استفاده از قاعده زنجیره‌ای احتمال ($P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y)$)، هر کدام از بخش‌ها را بازنویسی می‌کنیم:

$$= P(A_۳|A_۱ \cap A_۲ \cap G) \cdot P(G|A_۱ \cap A_۲) + P(A_۳|A_۱ \cap A_۲ \cap \bar{G}) \cdot P(\bar{G}|A_۱ \cap A_۲)$$

در نهایت، با توجه به استقلال شرطی رأی قاضی‌ها (یعنی رأی قاضی سوم تنها به وضعیت واقعی متهم بستگی دارد و نه به رأی دیگر قاضی‌ها)، عبارت ساده می‌شود:

$$= P(A_۳|G) \cdot P(B|A_۱ \cap A_۲) + P(A_۳|\bar{G}) \cdot P(\bar{G}|A_۱ \cap A_۲)$$

حال با استفاده از قانون بیز، باور خود از گناهکار بودن متهم را بر اساس رأی دو قاضی اول به صورت زیر به‌روزرسانی می کنیم:

$$\begin{aligned} P(G|A_۱, A_۲) &= \frac{P(A_۱ \cap A_۲ \cap G)}{P(A_۱ \cap A_۲ \cap G) + P(A_۱ \cap A_۲ \cap \bar{G})} \\ &= \frac{۰/۸ \times ۰/۸ \times ۰/۷}{(۰/۸ \times ۰/۸ \times ۰/۷) + (۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۳)} = \frac{۰/۴۴۸}{۰/۴۴۸ + ۰/۰۰۳} = \frac{۰/۴۴۸}{۰/۴۵۱} \approx ۰/۹۹۳۳ \\ P(\bar{G}|A_۱, A_۲) &= ۱ - ۰/۹۹۳۳ = ۰/۰۰۶۷ \end{aligned}$$

این مقادیر را در فرمول اصلی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(A_۳|A_۱, A_۲) \approx (۰/۸)(۰/۹۹۳۳) + (۰/۹)(۰/۰۰۶۷) = ۰/۷۹۵۳۱$$

ب) قاضی اول رأی به گناهکاری و دوم رأی به بی‌گناهی داده است ($A_۱, \bar{A}_۲$):
مراحل مشابه قسمت قبل است.
ابتدا باور خود را به‌روزرسانی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
P(G|A_۱, \bar{A}_۲) &= \frac{P(A_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap G)}{P(A_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap G) + P(A_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{G})} \\
&= \frac{۰/۸ \times ۰/۲ \times ۰/۷}{(۰/۸ \times ۰/۲ \times ۰/۷) + (۰/۹ \times ۰/۱ \times ۰/۳)} = \frac{۰/۱۱۲}{۰/۱۱۲ + ۰/۰۲۷} = \frac{۰/۱۱۲}{۰/۱۳۹} \approx ۰/۸۰۵۸ \\
P(\bar{G}|A_۱, \bar{A}_۲) &= ۱ - ۰/۸۰۵۸ = ۰/۱۹۴۲
\end{aligned}$$

و در نهایت:

$$P(A_۳|A_۱, \bar{A}_۲) \approx (۰/۸)(۰/۸۰۵۸) + (۰/۱)(۰/۱۹۴۲) = ۰/۶۶۴۰۶$$

ج) قاضی اول و دوم رأی به بی‌گناهی داده‌اند ($\bar{A}_۱, \bar{A}_۲$):

$$\begin{aligned}
P(G|\bar{A}_۱, \bar{A}_۲) &= \frac{P(\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap G)}{P(\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap G) + P(\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{G})} \\
&= \frac{۰/۲ \times ۰/۲ \times ۰/۷}{(۰/۲ \times ۰/۲ \times ۰/۷) + (۰/۹ \times ۰/۹ \times ۰/۳)} = \frac{۰/۰۲۸}{۰/۰۲۸ + ۰/۲۴۳} = \frac{۰/۰۲۸}{۰/۲۷۱} \approx ۰/۱۰۳۳ \\
P(\bar{G}|\bar{A}_۱, \bar{A}_۲) &= ۱ - ۰/۱۰۳۳ = ۰/۸۹۶۷
\end{aligned}$$

و در نهایت:

$$P(A_۳|\bar{A}_۱, \bar{A}_۲) \approx (۰/۸)(۰/۱۰۳۳) + (۰/۱)(۰/۸۹۶۷) = ۰/۱۷۲۳۱$$

توضیح بخش دوم:
بله، رأی دو قاضی اول کاملاً در پیش‌بینی رأی قاضی سوم مؤثر است، زیرا این رأی‌ها به عنوان «شواهد» عمل کرده و باور اولیه ما (۷۰٪ احتمال گناهکاری) را با استفاده از قانون بیز به شدت تغییر می‌دهند. این تغییر باور مستقیماً بر پیش‌بینی ما اثر می‌گذارد. برای مثال، در بخش (الف)، دو رأی «گناهکار» باور ما به گناهکار بودن متهم را به بیش از ۹۹٪ می‌رساند و در نتیجه، احتمال رأی گناهکاری قاضی سوم به ۵.۷۹ درصد افزایش می‌یابد. در مقابل، در بخش (ج)، دو رأی «بی‌گناه» این باور را به حدود ۱۰٪ کاهش داده و بر همین اساس، احتمال رأی گناهکاری قاضی سوم به شدت به ۲.۱۷ درصد افت می‌کند. این اختلاف چشمگیر بین نتایج دو بخش، به وضوح نشان می‌دهد که شواهد اولیه چگونه پیش‌بینی‌های آینده را به شکل بنیادین تغییر می‌دهند.

۹. سکه ای که می خواست عادلانه باشد

سکه ای داریم که احتمال پشت یا رو آمدن آن برابر نیست. برای برابر کردن این احتمال روند زیر را طی میکنیم:

۱) سکه را می اندازیم

۲) دوباره سکه را می اندازیم

۳) اگر نتیجه هردو پرتاب یکسان بود دوباره به مرحله اول برمیگردیم

۴) آخرین سکه ای که انداخته شده نتیجه پرتاب سکه ی استاندارد خواهد بود

ثابت کنید این روش سکه انداختن باعث میشود که احتمال رو و پشت آمدن برابر شود.

پاسخ :

احتمال رو آمدن (T) و پشت آمدن (H) را جداگانه محاسبه میکنیم:

$$P(T) = P(H_۱T_۱) + P(H_۱H_۱H_۱T_۱) + P(T_۱T_۱H_۱T_۱) + ...$$
$$P(H) = P(T_۱H_۱) + P(H_۱H_۱T_۱H_۱) + P(T_۱T_۱T_۱H_۱) + ...$$

همانطور که میبینیم هر جایگشتی با هر تعدادی از پک های دوتایی از HH یا TT قبل از دو سکه آخر بیایند هیچ تاثیری در نتیجه خوانده شده از سکه ندارند و تنها دو عنصر پایانی هر سری انداختن است که تعیین میکند نتیجه سکه انداختن چه باشد.

اگر احتمال رو آمدن p و احتمال پشت آمدن $(۱ - p)$ باشد از آنجا که احتمال آمدن هر جهت سکه در هر پرتاب از دیگری مستقل است خواهیم داشت:

$$P(H) = (\sum_{i=۰}^{\infty}\sum_{j=۰}^{\infty} p^{۲i}.(۱-p)^{۲j}) \times p \times (۱-p)$$

با کمی دقت متوجه میشویم که احتمال پشت آمدن هم دقیقا با همین مقدار برابر خواهد بود:

$$P(H) = (\sum_{i=۰}^{\infty}\sum_{j=۰}^{\infty} p^{۲i}.(۱-p)^{۲j}) \times (۱-p) \times p$$

بنابراین احتمال رو آمدن و پشت آمدن این سکه با این الگوریتم برابر شد و توانستیم سکه ای عادلانه بسازیم.